Practica 12

Integrales dobles II

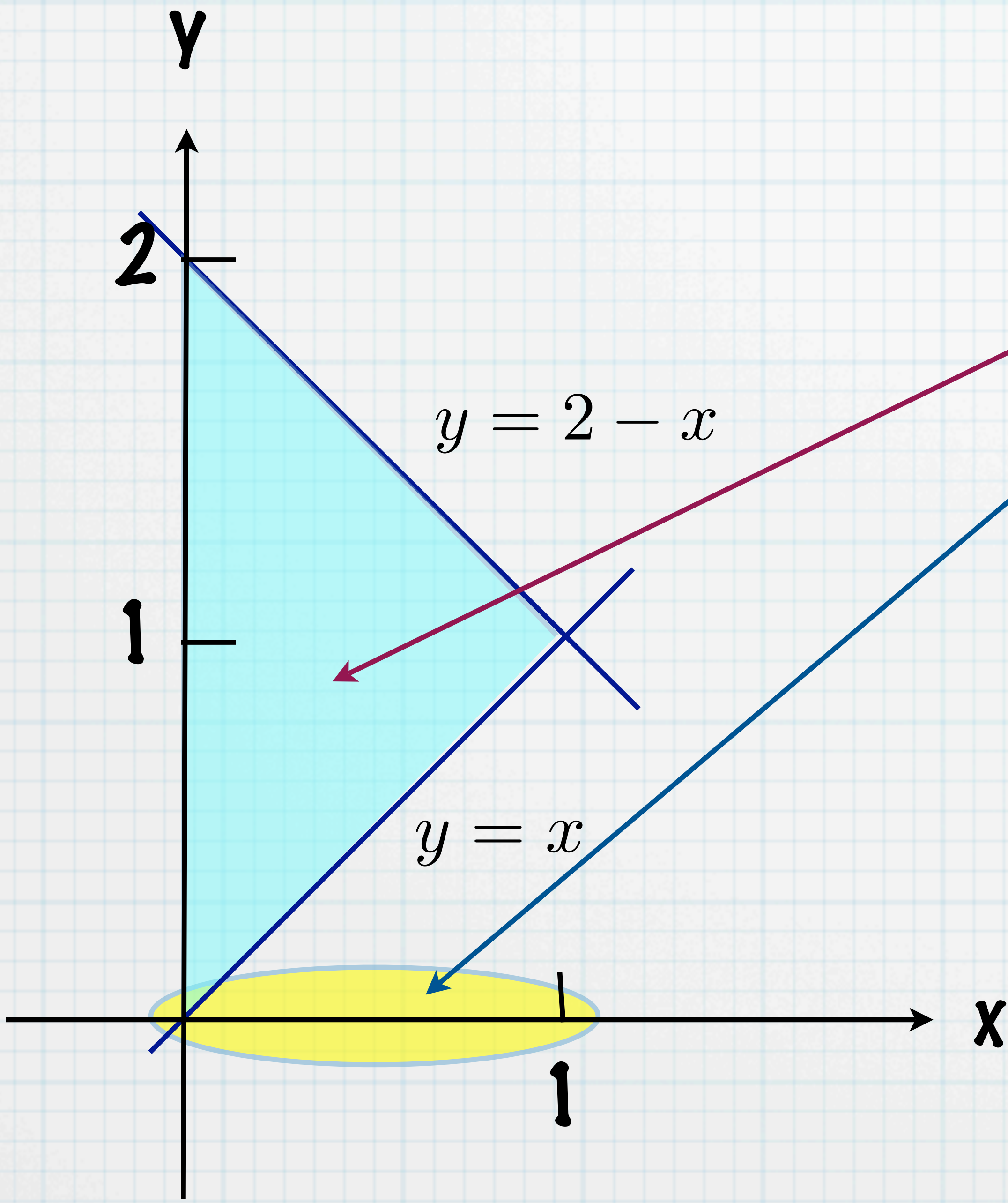
Problema 1.

Halle el volumen de la región delimitada por el paraboloide de ecuación

$$z = x^2 + y^2$$

y por debajo por el triángulo formado por las lineas:

$y = x, x = 0$ y $x + y = 2$



$$V = \boxed{\int_0^1} \boxed{\int_x^{2-x}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$V = \int_0^1 \int_x^{2-x} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{2-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2 - \frac{7x^3}{3} + \frac{(2-x)^3}{3}\right] dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{7x^4}{12} + \frac{(2-x)^4}{12}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12} + \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{16}{12}\right) \boxed{= \frac{4}{3}}$$

Problema 2.

Halle el volumen del solido que se forma en el primer octante, delimitado por los planos de coordenadas, el cilindro de ecuación

$$x^2 + y^2 = 4,$$

y el plano de ecuacion

$$z + y = 3.$$

$$V = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (3-y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \left[3y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_0^2 \left[3\sqrt{4-x^2} - \frac{4-x^2}{2} \right] dx$$

$$= \left[\frac{3}{2} x \sqrt{4-x^2} + 6 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 2x + \frac{x^3}{6} \right]_0^2$$

$$= \frac{6\,\pi}{2} - 4 + \frac{8}{6} \quad \boxed{= \frac{9\pi - 8}{3}}$$

Problema 3.

Halle el volumen del solido formado por el corte del primer octante por el cilindro $z = 12 - 3y^2$ y el plano $x + y = 2$.

$$V = \int_0^2 \int_0^{2-x} \left[12 - 3y^2\right] dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[12y - y^3\right]_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[24 - 12x - (2-x)^3\right] dx$$

$$= \left[24 - 6x^2 - \frac{(2-x)^4}{4}\right]_0^2 \boxed{= 20}$$

Problema 4.

Un cilindro recto de base no circular, tiene su base en una región R del plano OXY delimitado por arriba por el paraboloide de ecuación

$$z = x^2 + y^2 .$$

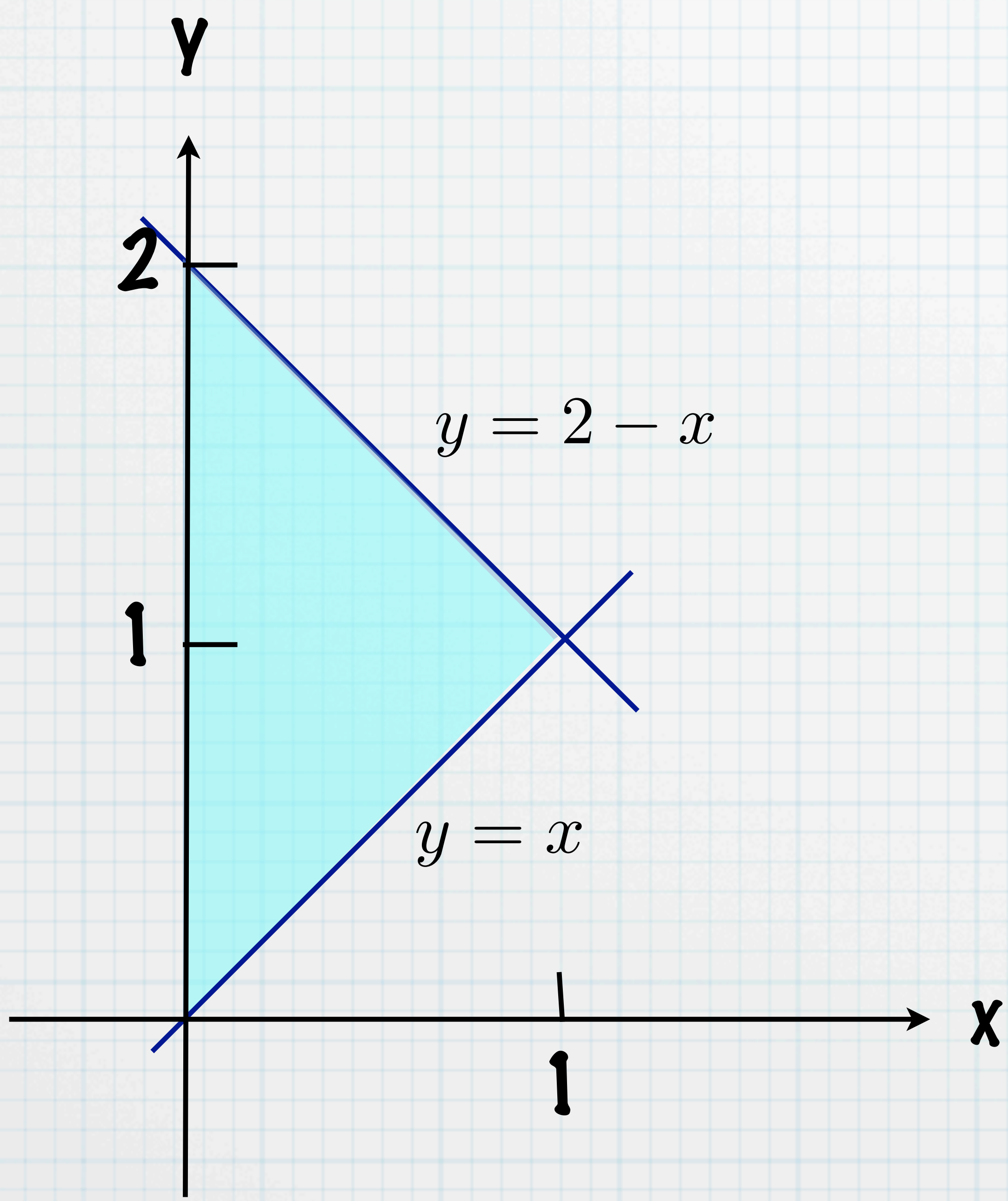
15-01-59

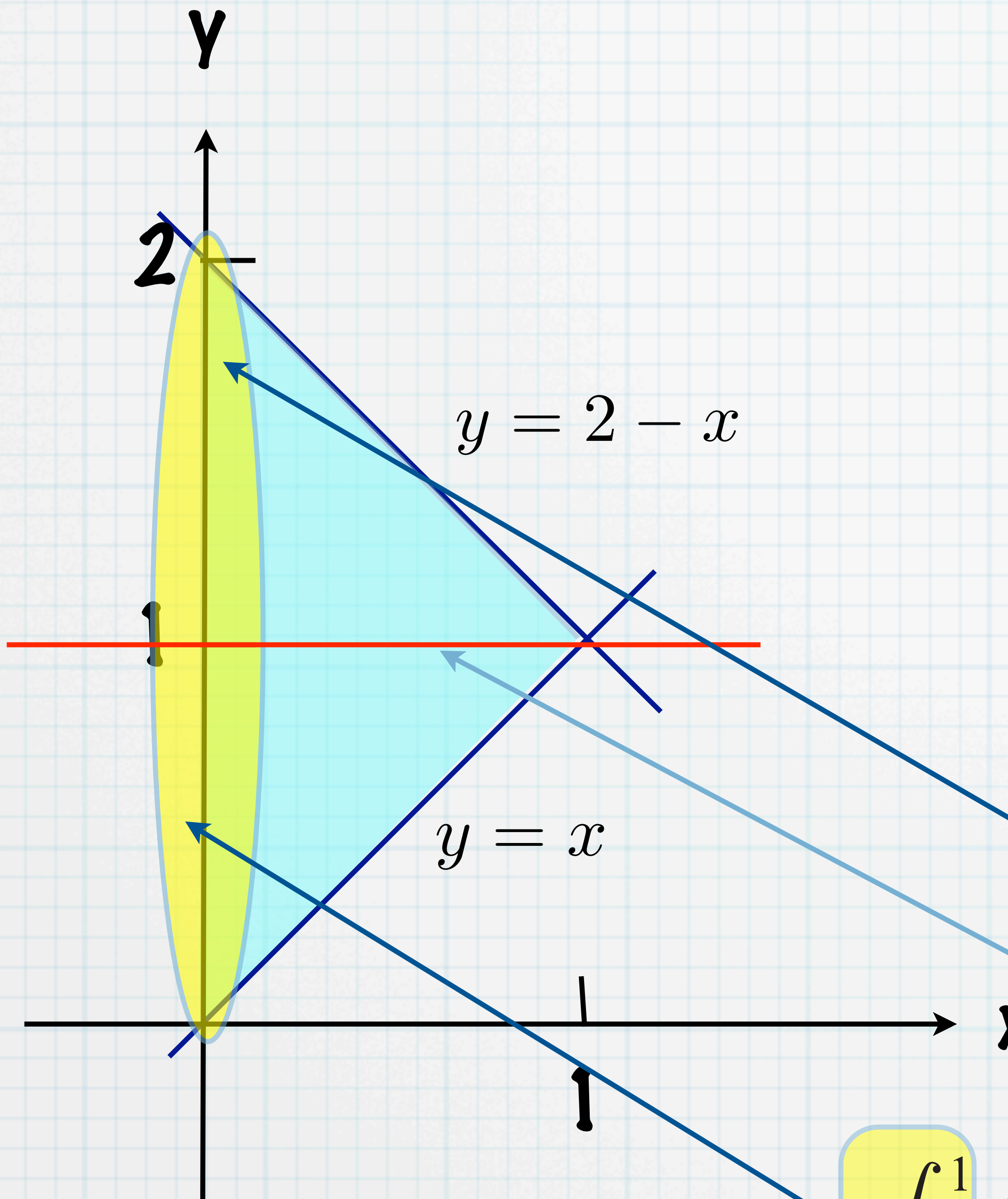
El volumen del cilindro esta dado por

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

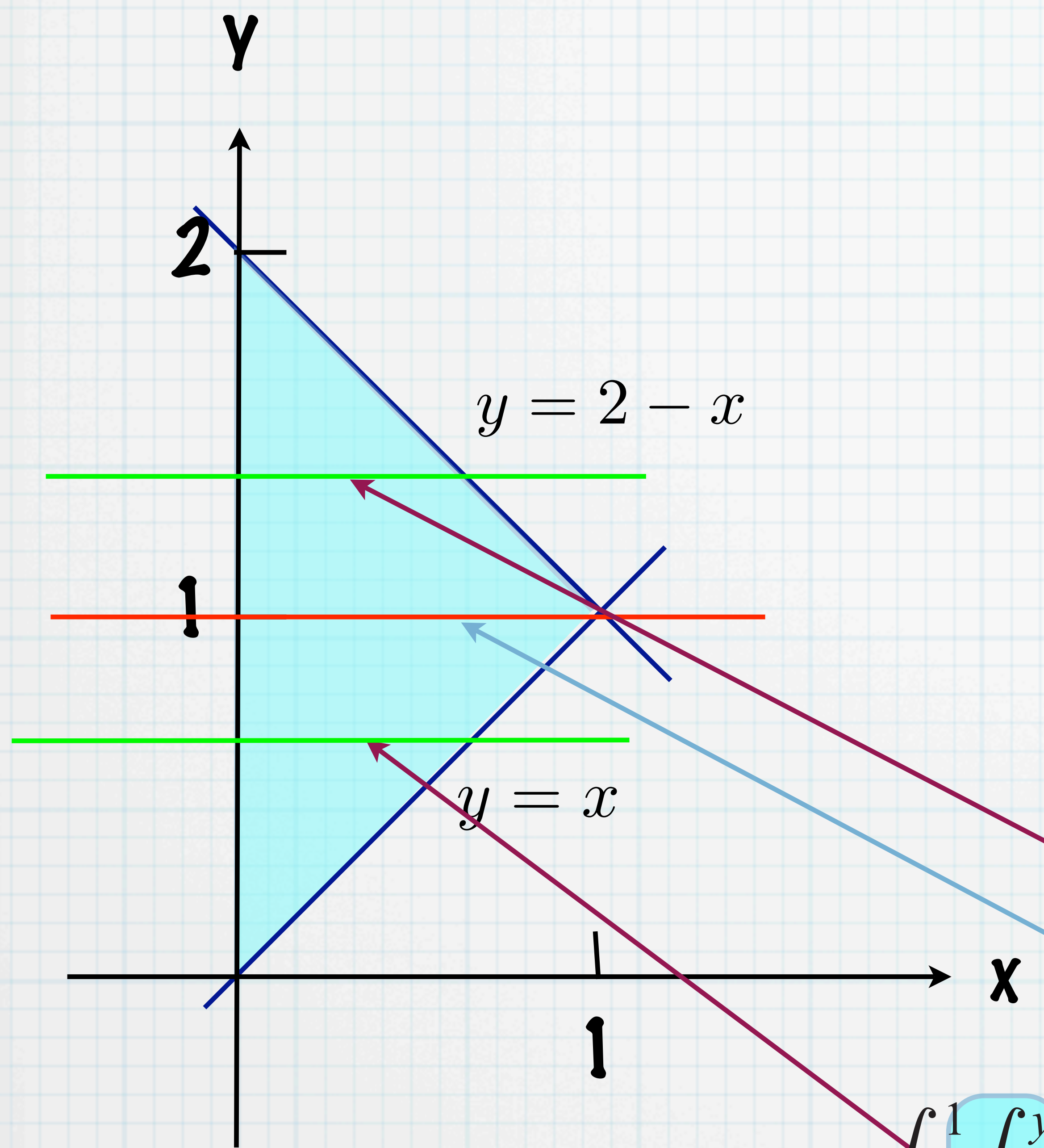
Dibuje la región base (R) y exprese el volumen como una sola integral, haciendo cambio de orden de integración. Finalmente calcule el volumen.

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

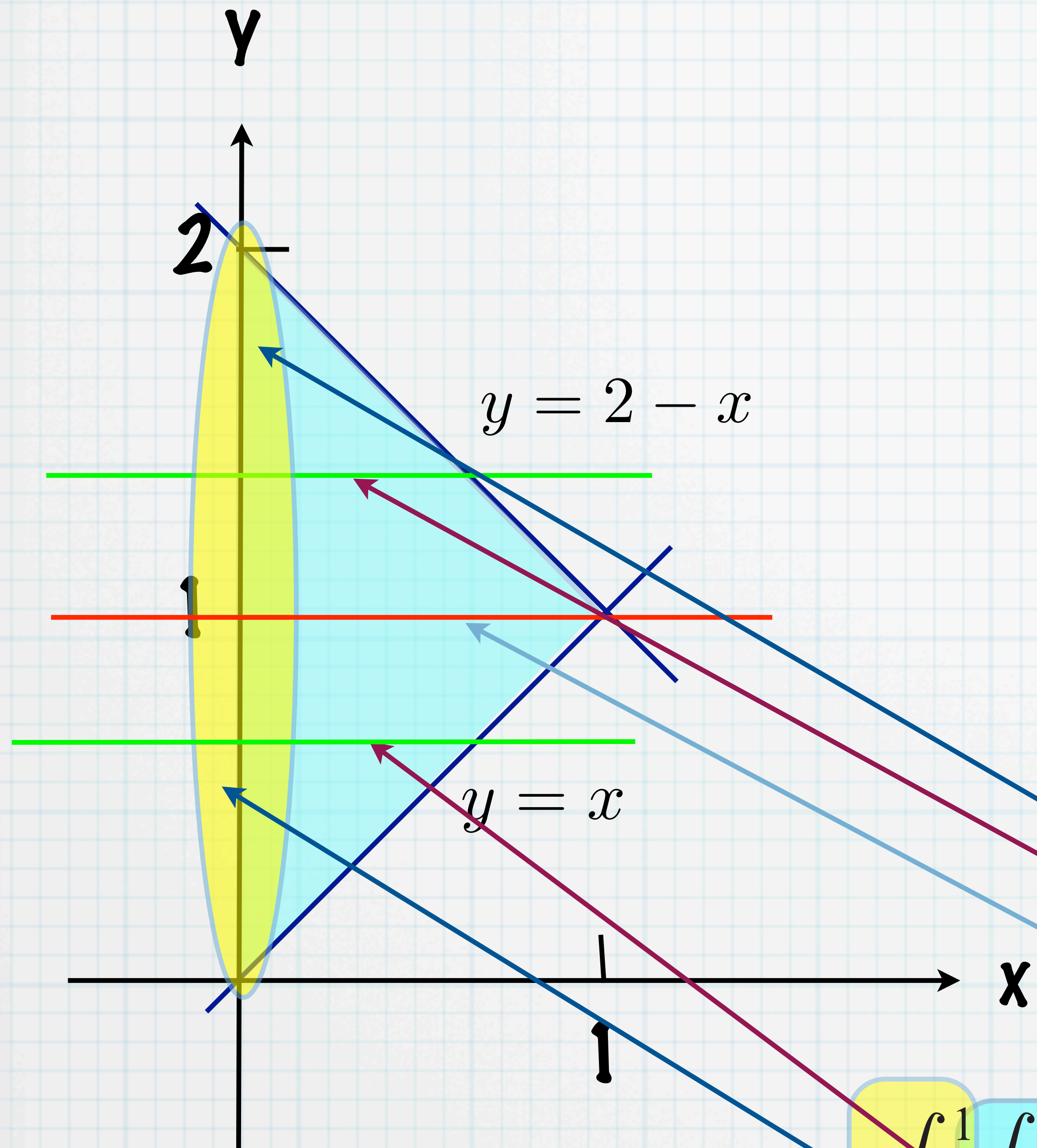




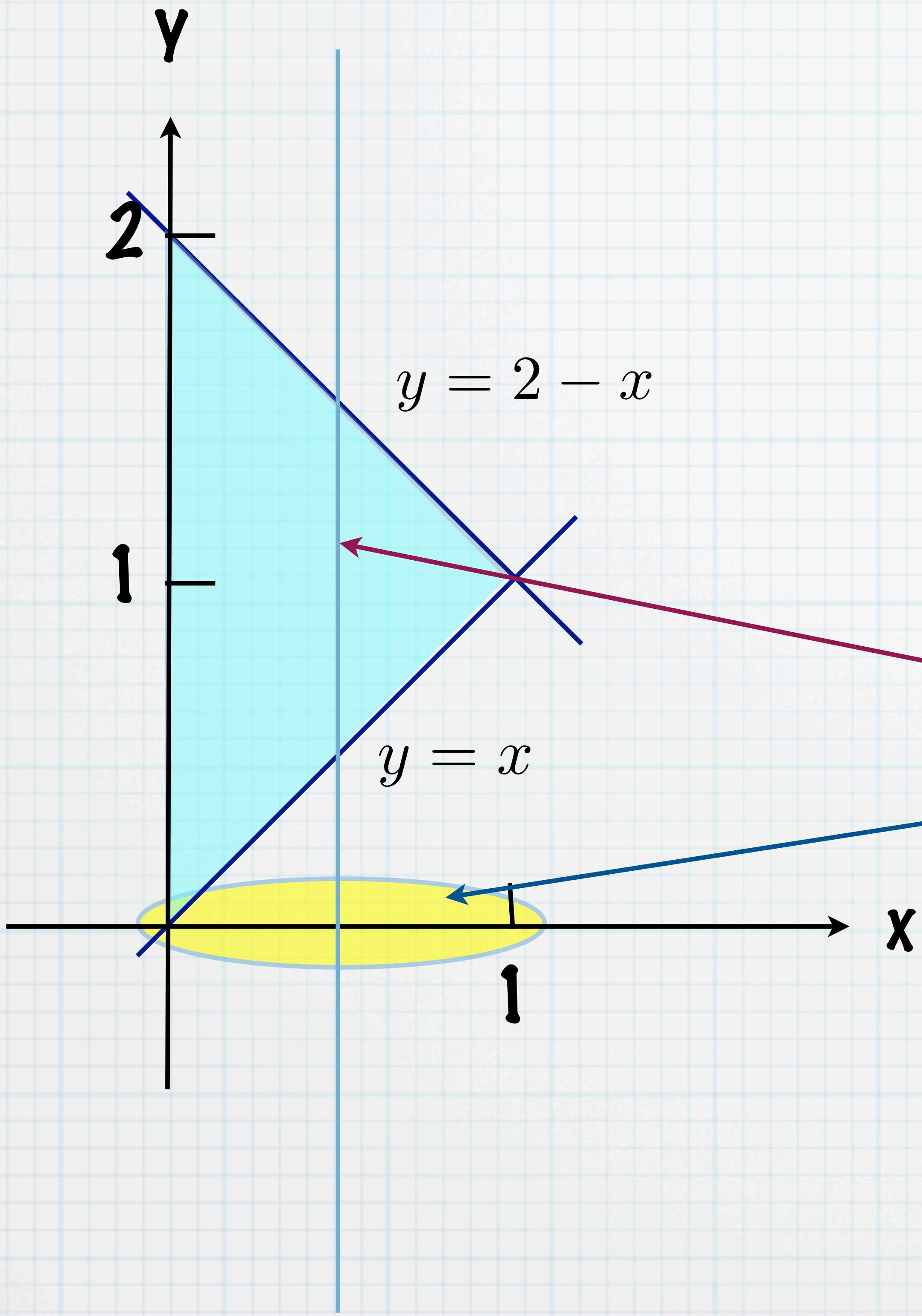
$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$



$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$



$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$



$$V = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$V = \int_0^1 \int_x^{2-x} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$$

$$V = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{2-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2 - \frac{7x^3}{3} + \frac{(2-x)^3}{3}\right] dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{7x^4}{12} + \frac{(2-x)^4}{12}\right]_0^1 \boxed{= \frac{4}{3}}$$

Ejercicio 1.

Calcular:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y + 1)\, dy\, dx$$

(r) 2π

Evaluar la integral:

$$\int_0^2 (\tan^{-1}\pi x - \tan^{-1} x)\, dx.$$

Ejercicio 2.

(R) $2\tan^{-1} 2\pi - 2\tan^{-1} 2 - \frac{1}{2\pi}\ln\left(1 + 4\pi^2\right) + \frac{\ln 5}{2}$

Que región R del plano OXY maximiza la integral

$$\iint_R (4 - x^2 - 2y^2)\, dA$$

Ejercicio 3.

(R) La región R es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ y su interior

Problema 4.

Encuentre el centro de masa de una plato delgada de densidad $\delta = 3$ delimitado por las lineas $x = 0, y = x,$ y por la parábola $y = 2 - x^2$ en el primer cuadrante

$$M = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} (3)\, dx\, dy$$

La masa total

$$= 3 \int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right) dx = \frac{7}{2}$$

$$M_y = 3 \int_0^1 \int_x^{2-x^2} (x)\, dx\, dy$$

$$= 3 \int_0^1 (xy)_x^{2-x^2}\, dx$$

$$= 3 \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^2\right) dx = \frac{5}{4}$$

$$M_x = 3 \int_0^1 \int_x^{2-x^2} (y)\, dx\, dy = \frac{19}{5}$$

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{5}{14}$$

$$\overline{\mathrm{y}} = \frac{38}{35}$$

Problema 5.

Encuentre el momento de inercia respecto al eje y de una lamina delgada de densidad constante $\delta = 1$ delimitada por la curva $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}$ y el intervalo $\pi \leq x \leq 2\pi$ en el eje x.

$$\mathrm{I_x} = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y^2 \, dy \, dx = \int_{-2}^{2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^{3/2} \, dx = 4\pi$$

Por simetría tenemos

$$\mathrm{I_y} = 4\pi$$

Finalmente

$$\boxed{\mathrm{I_o} = \mathrm{I_x} + \mathrm{I_y} = 8\pi}$$

Encuentre el centro de masa de una plato triangular delgado delimitado por las rectas $y = x$ y $y = 2 - x$ si la densidad esta dada por:

$$\delta(x, y) = 6x + 3y + 3.$$

Ejercicio 4.

(R) $\bar{x} = \frac{3}{8}$

$\bar{y} = \frac{17}{16}$

Evaluar las siguientes integrales:

a) $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)\, dx\, dy$$

b) $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\, dy\, dx$$

Ejercicio 4.

(R) **a)** $\pi(\ln 4 - 1)$

b) π